



导数

导数的概念

新知探索

导数的定义1

符号说明

自变量在点 x_0 处的增量:

$$\Delta x = x - x_0$$

因变量的增量:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$



设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 及函数附近有定义, 若在 x_0 处极限存在, 则此极限值为

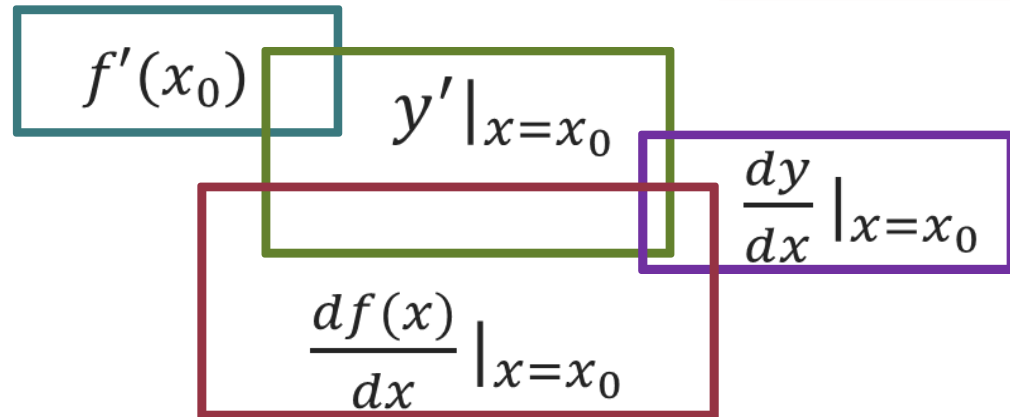
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

在 x_0 可导

极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 不存在

在 x_0 不可导

导数的记法





导数的定义辨析

导数的常见形式

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

换个符号：① $\Delta x \rightarrow h$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\textcircled{2} f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$\Delta x = x - x_0$



知识应用



例1、若 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $f'(x_0) = 1$ ，
试求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{h}$

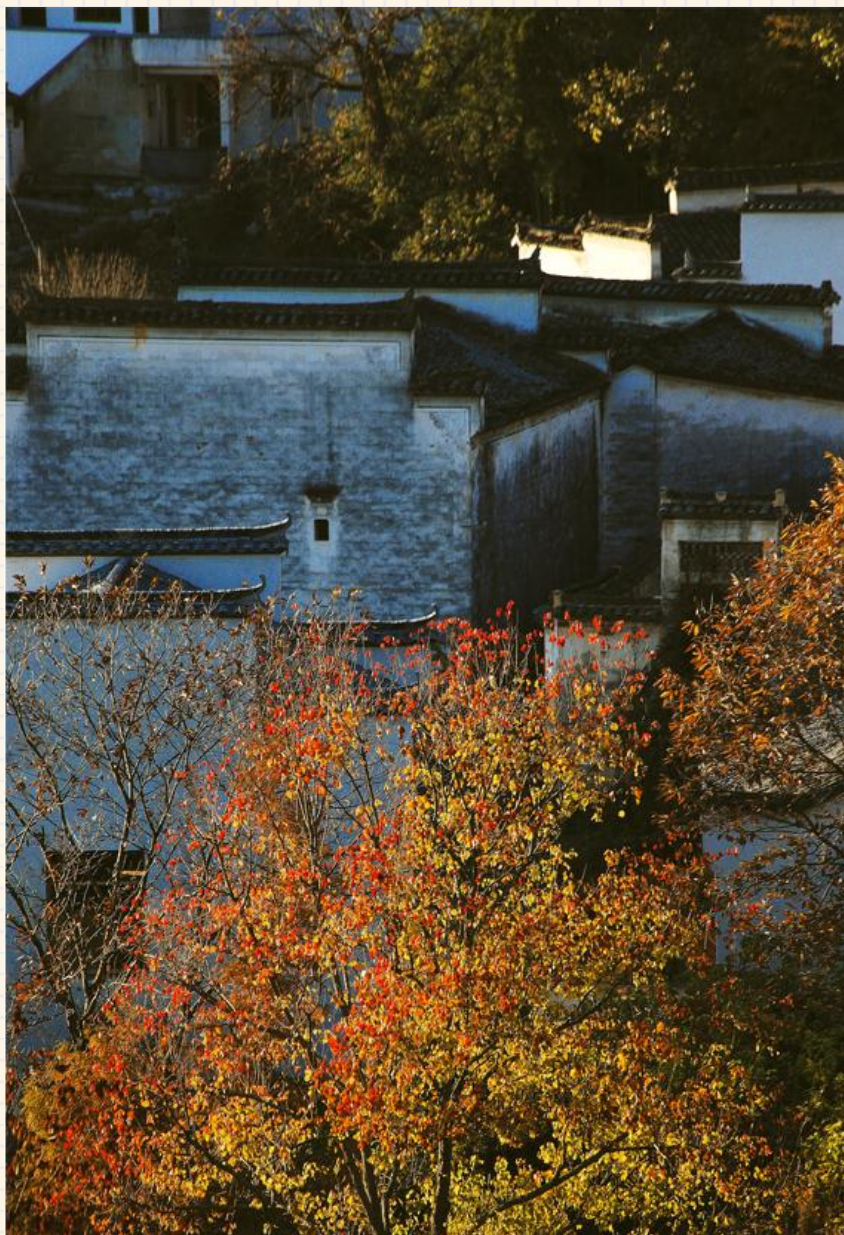
$$\text{解析： } f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = 1$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{h} = 2f'(x_0) = 2$$

课堂练习：若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且

$$f'(x_0) = \frac{1}{2}, \text{ 求 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f\left(x_0 + \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2\right) - f(x_0)}{(\Delta x)^2}.$$

拓展巩固



头脑风暴1: 若函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f'(0) = 2$, 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(0)}{x}$$

新知探索

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

左导数

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

右导数

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导 \Leftrightarrow 左导和右导存在且相等

左右导数的概念



知识应用

讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处的可导性.

用定义判断 x_0 点处的可导性:

① 求函数的增量: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

② 计算比值: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

③ 求极限: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$



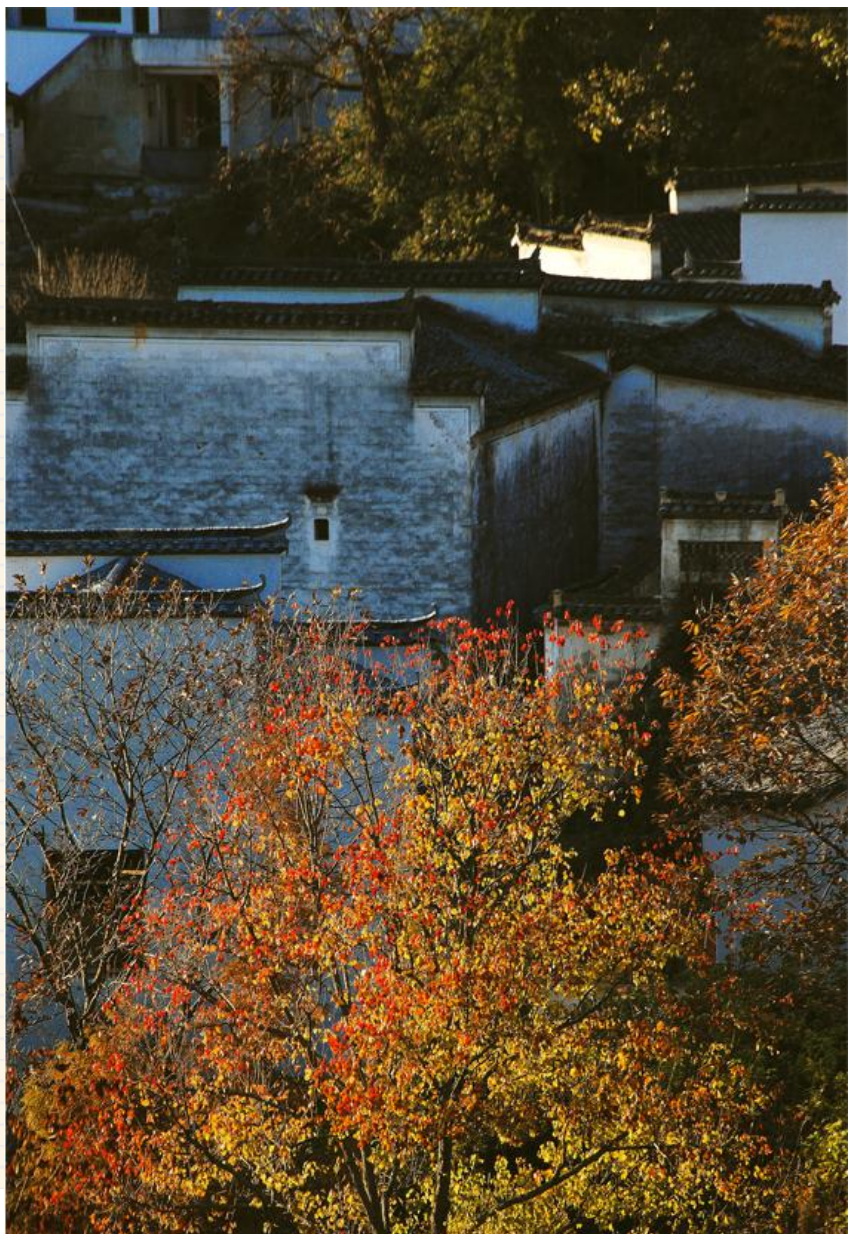
新知巩固



头脑风暴2:

1、设函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$ 判断在 $x = 0$ 处左、右导数与导数.

2、设函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$ 判断在 $x = 0$ 处的导数.



导数的定义2

设函数 $y = f(x)$ 在区间 D 内的每一点 x 处都可导，就称函数 $f(x)$ 在开区间 D 内可导。

导函数(导数):

$$y = f'(x)$$

$$y', \frac{dy}{dx} \text{ 或 } \frac{df(x)}{dx}$$