

# 求极限的方法

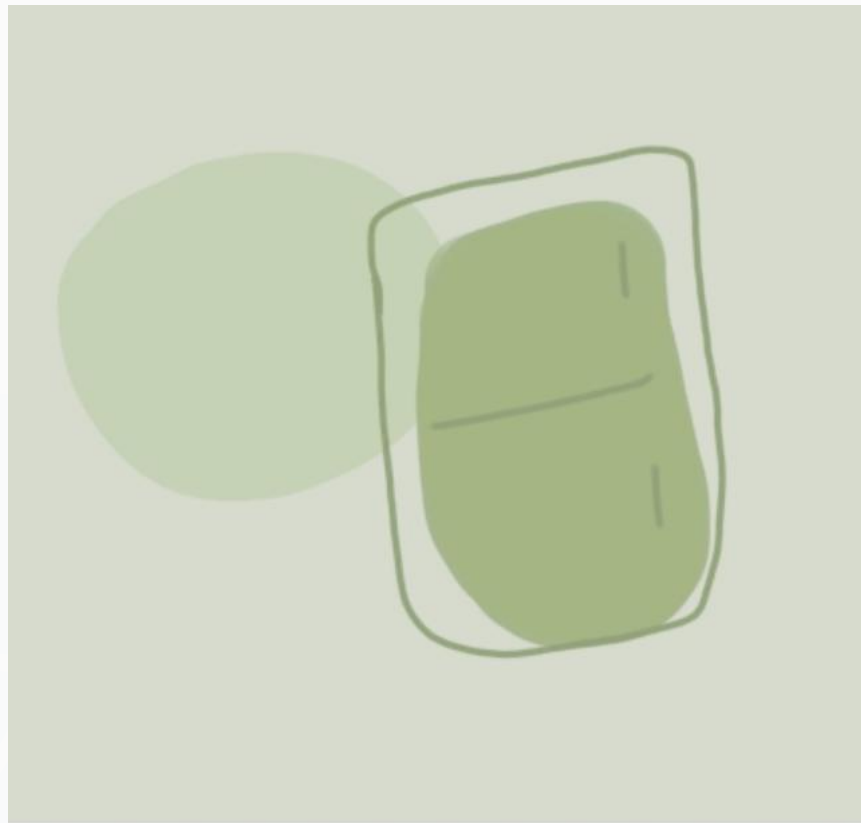
## 一、直接代值

$$1、\lim_{x \rightarrow 0} x =? \quad 0$$

$$2、\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x =? \quad 1$$

$$3、\lim_{x \rightarrow 4} 3^x =? \quad 81$$

$$4、\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \arccos x =? \quad \frac{\pi}{3}$$



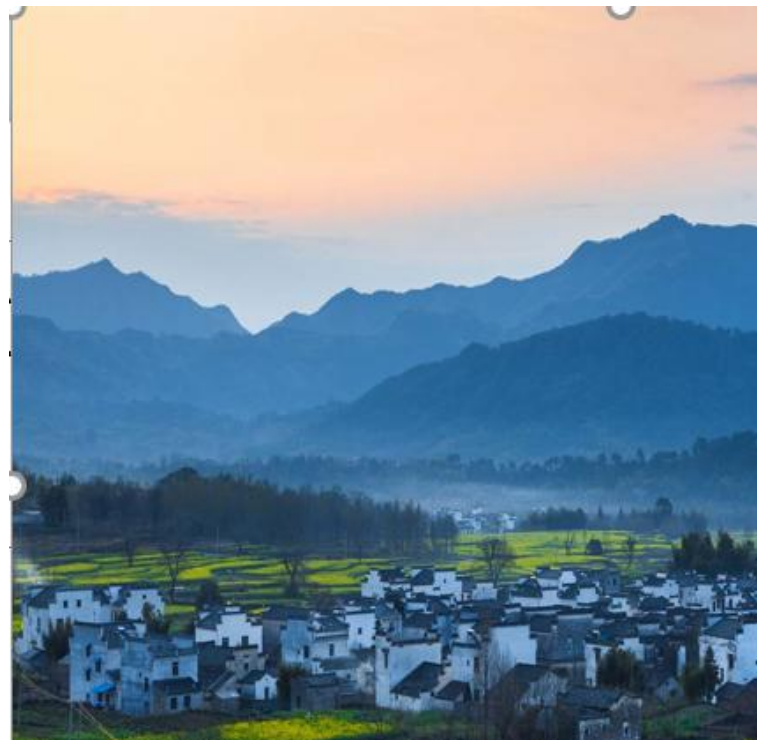
# 1、分段函数的极限

1、求函数  $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$  当  $x \rightarrow 0$  时的极限.

解:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$\therefore$  当  $x \rightarrow 0$  时函数  $f(x)$  的极限不存在



# 课堂练习



1、设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2, & 1 < x < 2 \end{cases}$

求  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  并由此判断  $\lim f(x)$  是否存在?

2、设函数  $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x + 1, & x < 0 \end{cases}$ ,

求  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$

3、设函数  $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x > 1 \\ 2x, & x < 1 \end{cases}$

①求  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  ②求  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

# 极限的四则运算

1、可加性

2、可乘性

3、可除性



$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - 3) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 2x - \lim_{x \rightarrow 2} 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x e^x = \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} e^x$$

推论：①  $\lim_{x \rightarrow ?} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow ?} f(x)$

②  $\lim_{x \rightarrow ?} (f(x))^m = (\lim_{x \rightarrow ?} f(x))^m$

例：  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin^4 x = (\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin x)^4$

# 极限的性质

## 1、唯一性

若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在，则此极限是唯一的。

## 2、保不等式性

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 都存在，且在某

邻域 $U^\circ(x_0; \delta)$ 内有 $f(x) \leq g(x)$ ，则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

## 3、迫敛性 (夹逼准则)

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ ，且在某

邻域 $U^\circ(x_0; \delta)$ 内有 $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ ，则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$$



# 课堂练习

例1. 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x}$

例2. 计算  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 4}$



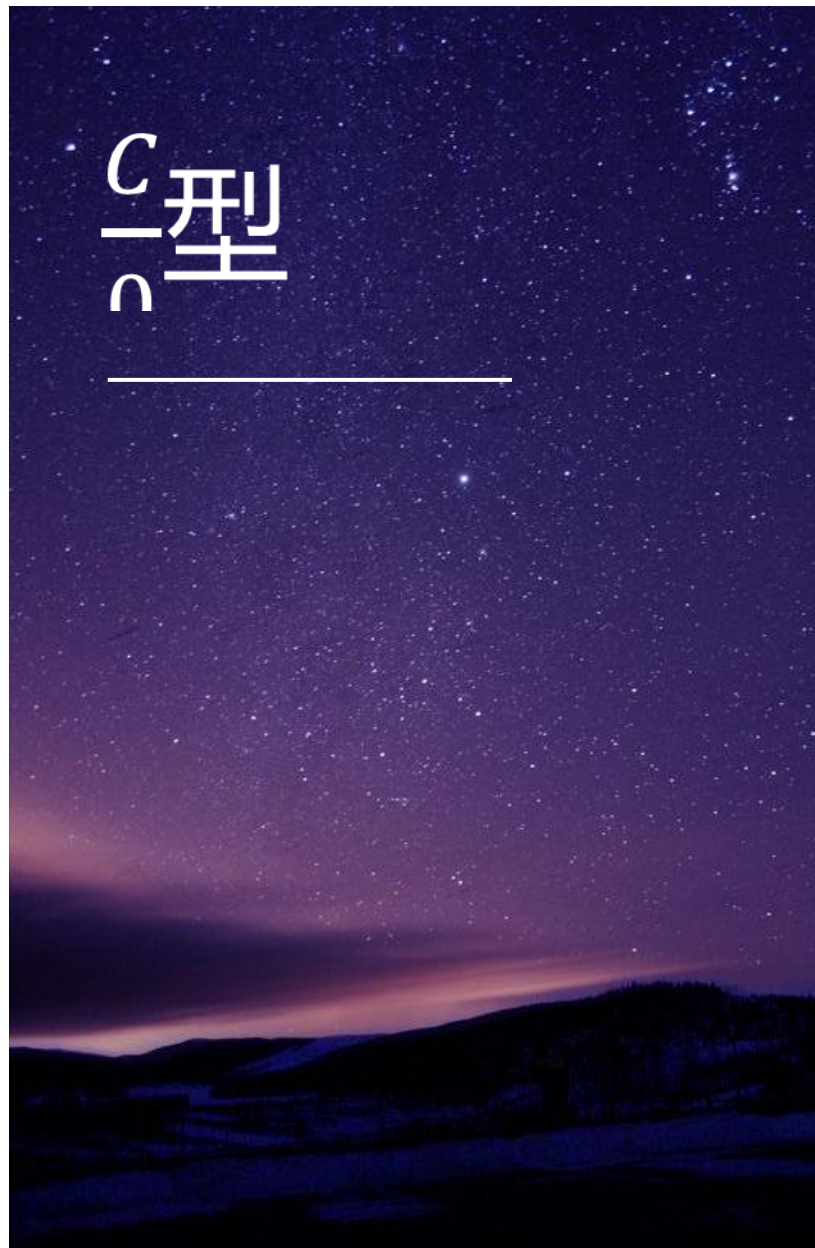
例1、 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x-1}{x^2+2x-3}$

解：原式  $\overset{3}{\underset{0}{=}} \infty$

求极限的方法  
不能直接代值

C型

---



例1、 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{4-x^2}$

解：原式 =  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(2-x)(2+x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2+x}$$

$$= \frac{1}{4}$$

求极限的方法

不能直接代值

练习：

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{8-2x}{x^2-16}$$

消去零因子



例2、 $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{2x-2} - \frac{1}{x^2-1} \right)$

解：原式 =  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{(x-1)(x+1)} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x+1}{2(x-1)(x+1)} - \frac{2}{2(x-1)(x+1)} \right)$$
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x-1}{2(x-1)(x+1)} \right)$$
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2(x+1)}$$
$$= \frac{1}{4}$$

求极限的方法

不能直接代值

练习：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2-x} \right)$$

通分

# 课堂练习

---

例1. 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} \right)$

---



例3、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 9x}{2x^5 - 3x^3 + 2}$

解：原式 =  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{9}{x^4}}{2 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^5}}$   
 $= \frac{3}{2}$

求极限的方法

不能直接代值

练习： $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^7 - 5x^2 + 2}{13x^7 + 5x^5 + x - 16}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n}$$

$$= \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & n = m \\ 0, & n > m \\ \infty, & n < m \end{cases}$$



无穷小因子分出法

# 课堂练习

例1. 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3+6x^2+5x+1}}{3x-2}$

---

例2. 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^{30}(3x-2)^{20}}{(2x+1)^{50}}$



例3、 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$

解：原式 $=\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{5x-4}-\sqrt{x})(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})}{(x-1)(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(5x-4)-x}{(x-1)(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(4x-4)}{(x-1)(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{\sqrt{5x-4}+\sqrt{x}}$$

$$= 2$$

求极限的方法

不能直接代值

练习. 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$

有理化

# 课堂练习

1. 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{1+x^2} - x)$



# 两个重要极限

①  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$     练习1:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

②  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$     ②互为倒数  
①  $(1 + 0)^\infty$ 型

练习2:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$

练习3:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$

练习4:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

练习5:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$

