

无穷大量和 无穷小量

——无穷小量

以零为极限的变量称为无穷小量：

若 $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = 0$,
则 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0/\infty$ 时的无穷小量

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$(x - 1)$ 是 $x \rightarrow 1$ 的无穷小量
 $\sin x$ 是 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小量
 $\frac{1}{x}$ 是 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小量



1、无穷小量是**变量**不是一个数，需指出 x 的变化趋势。

2、绝对值很小的常数，不是无穷小；

$$\lim_{x \rightarrow ?} \frac{1}{10000} = \frac{1}{10000}$$

$$\lim_{x \rightarrow ?} 0 = 0$$

3、常数中只有**0**是无穷小

无穷小的性质

可加性

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\tan x + \sin x)$$

可积性

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \ln x = 0$$

常数、有界变量与无穷小的可积性

$$\lim_{x \rightarrow 0} Cx = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

无穷大量



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

$x \rightarrow 0$ 时
 $\frac{1}{x}$ 是无穷
大量

$x \rightarrow +\infty$ 时
 e^x 是无穷
大量

1、无穷大不是一个很大的数，是一个绝对值无限大的**变量**；

2、 x 的**变化趋势**很重要；

3、无穷大是极限不存在的一种情形，这里只是借用极限的符号。

高阶无穷小量

$$\text{若 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

则当 $x \rightarrow x_0$ 时,
 f 为 g 的高阶无穷小量

记为 $f(x) = o(g(x))(x \rightarrow x_0)$

例1、当 $x \rightarrow 0$ 时, 判断
 $x, x^2, x^3, x^4, \dots, x^k$
($k = 1, 2, 3, \dots$) 之间的关系

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

同阶无穷小量

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$$

记为 $f(x) = O(g(x))(x \rightarrow x_0)$

例2、当 $x \rightarrow 2$ 时,
 $x^2 - 4x + 4$ 与 $x^2 - 4$

例3、 $x \rightarrow 0$, $3x^4 - x^3 + x^2$
与 $5x^2$

$$x \rightarrow 0,$$
$$3x^3 \text{ 和 } 7x^3$$



★ 常见的等价无穷小量
 $(x \rightarrow 0)$

$$\sin x \sim x$$

$$\tan x \sim x$$

$$\arcsin x \sim x$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$\arctan x \sim x$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

等价无穷小量

$$f(x) \sim g(x) (x \rightarrow x_0)$$

等价无穷小量

当 $x \rightarrow 0$ 时

$$\sin 5x \sim \frac{5x}{1}$$

$$\ln(1 + x^2) \sim \frac{x^2}{1}$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时 $\frac{1}{x} \rightarrow 0$

$$\tan \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$$

当 $x \rightarrow 1$ 时 $x - 1 \rightarrow 0$

$$\arcsin(x - 1) \sim \frac{x - 1}{1}$$

$$\text{例1、} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x}$$

$$\text{例2、} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\arctan 2x}$$

等价无穷小量 求极限

乘除关系可替换，
加减不可替换

定理： $x \rightarrow x_0$, $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x)$

$$\text{例3、} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x^2}{x \cdot \sin x}$$

$$\text{例4、} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{\tan^2 x}$$

求极限的方法

直接
代值

不能直接
代值

通分

无穷小因
子分出法

消去零因
子

无等价穷
小替换