

本学期数学课程的内容

★导数

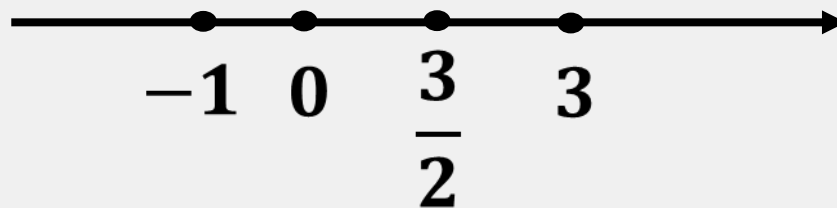
一元积分学

极限

微分

函数基础知识

区间：实数的集合



1、区间

$$R : (-\infty, +\infty)$$

$$A = \{x \mid -1 < x < 3\} \quad (-1, 3)$$

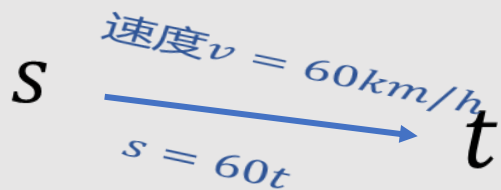
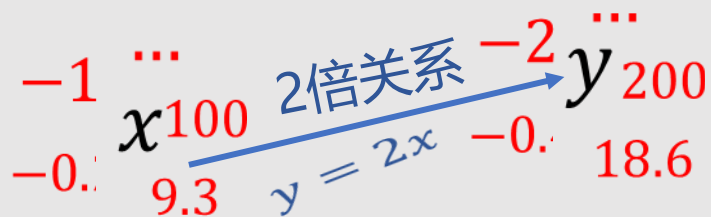
$$B = \{x \mid -1 \leq x < 3\} \quad [-1, 3)$$

$$C = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\} \quad [-1, 3]$$

$$D = \{x \mid -1 \leq x < 0 \text{ 或 } \frac{3}{2} < x < 3\} \quad [-1, 0) \cup (\frac{3}{2}, 3)$$

2、变量

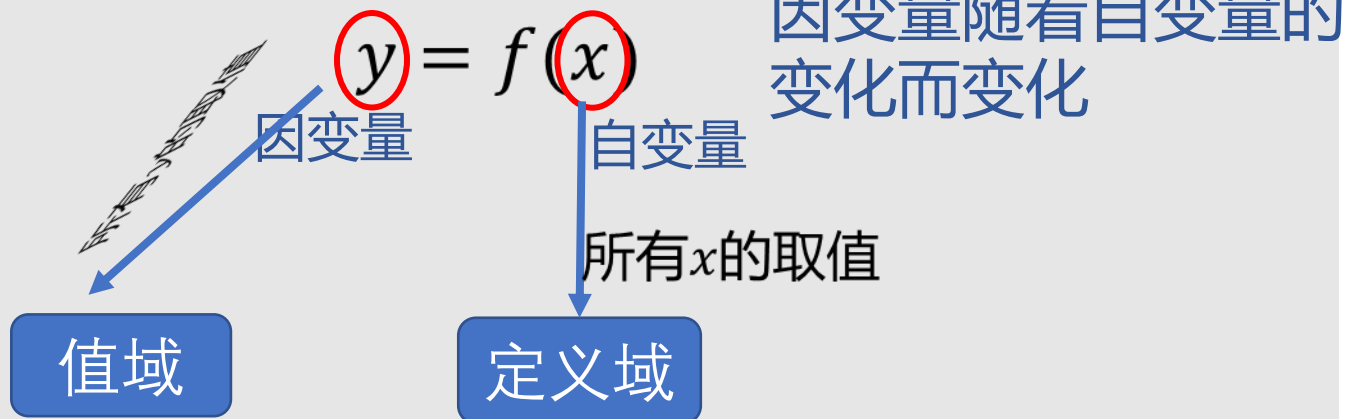
没有固定的值，是可以改变的数（变化的量）

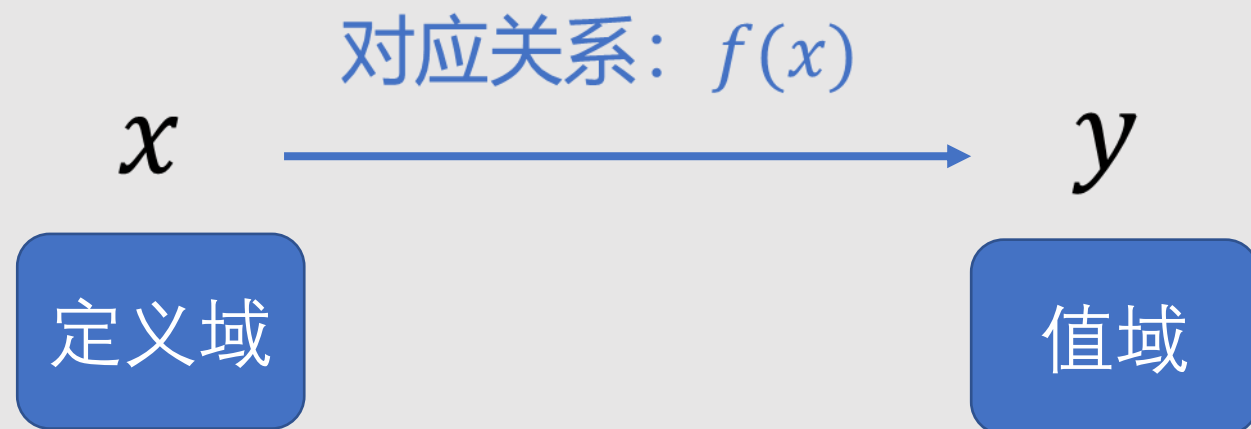


3、函数

描述变量之间关系的一种数学模型
(对应关系)

一般表达式:





3.1 函数三要素 ①定义域②对应法则③值域

常见类型:

①分母不能为0.

如 $f(x) = \frac{1}{(\quad)}$, $(\quad) \neq 0$

②偶次根号下非负.

如 $f(x) = \sqrt{(\quad)}$, $(\quad) \geq 0$

③对数的真数大于0. 如 $f(x) =$

$\log_a(\quad)$, $(\quad) > 0$

④ $f(x) = \tan(\quad)$, $(\quad) \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

⑤ $f(x) = \arcsin(\quad)$, $(\quad) \in [-1, 1]$

$f(x) = \arccos(\quad)$, $(\quad) \in [-1, 1]$

函数的定义域

使表达式有意义的所有自变量取值

函数的定义域 例题解析

例1、求函数 $y = \arcsin(x - 3)$ 的定义域

解： \arcsin 函数的定义域为 $[-1, 1]$ ，将 $x - 3$ 看做整体，即：
$$-1 \leq x - 3 \leq 1$$

得原函数定义域为：
 $\{x | 2 \leq x \leq 4\}$

例2、求函数 $y = \arcsin(x - 1) + \ln(1 - x)$ 的定义域.

例3、求函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} + \ln(4 - x^2)$ 的定义域.

例4、已知函数 $f(x)$ 的定义域 $[-1, 3)$ ，求函数 $f(2 - 4x)$ 的定义域.

例5、已知函数 $f(2 - 4x)$ 的定义域 $[-1, 3)$ ，求函数 $f(x)$ 的定义域.

1、奇偶性

①奇偶性的定义

奇函数: $f(x) = -f(-x)$

偶函数: $f(x) = f(-x)$



②判别方法



- (1) 定义域是否对称
- (2) $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系

函数的性质

例1：判断下列函数的奇偶性

$$\textcircled{1} f(x) = x^3$$

$$\textcircled{3} f(x) = 2x^2 + 1$$

$$\textcircled{5} f(x) = \frac{3}{x}$$

$$\textcircled{2} f(x) = \sqrt{x}$$

$$\textcircled{4} f(x) = x - 1$$

解：① $D = R$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 \\ &= -x^3 \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

$\therefore f(x)$ 是奇函数

⑤ $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{3}{-x} \\ &= -\frac{3}{x} \end{aligned}$$

$$= -f(x)$$

$\therefore f(x)$ 是奇函数



反函数

$$y = f(x) \rightarrow x = f^{-1}(y)$$

自变量 \rightarrow 因变量

因变量 \rightarrow 自变量

常见反函数：

$$\textcircled{1} y = a^x \longleftrightarrow y = \log_a x$$

$$\textcircled{2} y = \sin x \longleftrightarrow y = \arcsin x$$

例1 . 求函数 $y = \sqrt[3]{x+1}$ 的反函数.

例2 . 求函数 $y = 10^{2x+1}$ 的反函数.

例3 . 求函数 $y = 2\sin 3x$, $(-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6})$ 的反函数.

中学阶段 函数归类

①常数函数: $y = C$

②幂函数: $y = x^a$

③指数函数:

$$y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$$

④对数函数:

$$y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$$

⑤三角函数:

$$y = \sin x$$

$$y = \cos x$$

$$y = \tan x$$

⑥反三角函数:

$$y = \arcsin x$$

$$y = \arccos x$$

六种基本初等函数

5.三角函数

余切函数: $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

正割函数: $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$

余割函数: $y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$

三角函数转化关系

$$\textcircled{1} \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\textcircled{2} \sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\textcircled{3} \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\textcircled{4} 1 + \tan^2 x = \sec^2 x, \quad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

分段函数

对自变量的不同取值范围，函数有不同的表达式

符号函数：

$$y = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

狄立克雷函数：

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数} \\ 0, & x \text{ 是无理数} \end{cases}$$

例： $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1, & x > 1 \\ -x + 3, & x \leq 1 \end{cases}$

分别求 $f(0)$, $f(1)$, $f(f(1))$ 的值

特殊的函数

我们可以由六种基本初等函数构造出新函数

比如： $f(x) = x + 1$, $f(x) = \frac{x^3}{\log_2 x}$,

$f(x) = x \ln x$, $f(x) = \sin x - \cos x$

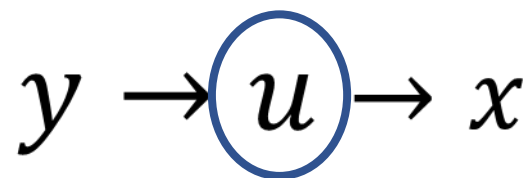
还有一种构造函数的特殊方法——复合

复合函数

大家先看以下两个函数：

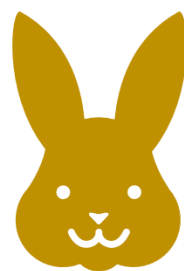
$$y = 2^u, \quad u = x^3$$

它们有联系吗？



中间变量 (为 x 和 y 搭桥)

复合函数



用 x^3 用替换 $y = 2^u$ 中的 u

$$y = 2^{x^3}$$

这样的函数称为
复合函数

复合函数

$$\begin{array}{ccc} y = 2^u, & & u = x^3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ y = f(u), & & u = g(x) \\ u \in D & \underbrace{\hspace{2cm}} & x \in E \end{array}$$

$$y = f(g(x)) \quad g(x) \in D$$

称 f 为外函数， g 为内函数， u 为中间变量；

函数 f 和 g 的复合运算也可简单地写作 $f \circ g$

例1、函数 $y = f(u) = \sqrt{u}, u \in [0, +\infty)$

与函数 $u = g(x) = 1 - x^2, x \in R$ 的复合函数为

复合函数:

$$y = f(g(x))$$

$$= \sqrt{1 - x^2}$$

$$x \in [-1, 1]$$

分析: 内函数 $g(x)$ 的值要落在外函数 $f(u)$ 的定义域中

$$g(x) \in [0, +\infty)$$

$$1 - x^2 \geq 0 \text{ 即 } x \in [-1, 1]$$

通过中间变量 u 搭桥, 用 $1 - x^2$ 换掉 $f(u)$ 中的 u

步骤: ①定义域②复合

课堂练习

下列函数能够复合吗？如果能，请求出复合函数

1、 $y = f(u) = u^2 - 3, u = \varphi(x) = \sin x$

2、 $y = \ln u, u = -x^2$

3、设函数 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ ，求：

$$f(2+x), f(2x), f(x^2), f(f(x)), f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$$

初等函数

- 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成的函数
- 例如: $y = e^{\sin x}$, $y = \sin(\sin x)$, $y = \lg(\lg x)$
- 分段函数都不是 (狄利克雷函数和符号函数), 但 $y = |x|$ 是例外.

拆分复合函数

$$y = \lg(u)$$



$$y = \lg u, \quad u = 3 - x$$

步骤总结：

- ① 函数的整体框架属于哪一种基本初等函数
- ② 加入中间变量

课堂练习

1、 $y = \sin x^2$

2、 $y = (\sin x)^2$

3、 $y = \ln(x + 3)$

4、 $y = e^{\cos^2 x}$

解： 1、 $y = \sin u, u = x^2$

2、 $y = u^2, u = \sin x$

3、 $y = \ln u, u = x + 3$

4、 $y = e^u, u = \cos^2 x$

$u = v^2, v = \cos x$