宜宾职业技术学院 Yibin Vocational & Technical College

工程应用数学教案

<table>
<tr><td>内容</td><td>学习函数极限的运算</td><td colspan="2">学 时</td><td>2</td></tr>
<tr><td>所属项目名称</td><td>数学零距离</td><td colspan="2">在课程进程中的位置</td><td>第 4 次</td></tr>
<tr><td>班级</td><td></td><td colspan="2">上课地点</td><td></td></tr>
<tr><td>上课时间</td><td colspan="4">周 月 日第 节至 周 月 日第 节</td></tr>
<tr><td rowspan="2">教学目标</td><td>知识目标</td><td>能力目标</td><td>素质目标</td><td>思政目标</td></tr>
<tr><td>理解无穷小的性质并会简单应用；掌握函数极限的四则运算法则</td><td>会用无穷小性质和极限运算法则求简单函数的极限</td><td>学会类比、归纳的学习方法</td><td>培养科学的研究方法</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="4">极限的四则运算</td></tr>
<tr><td>教学难点</td><td colspan="4">无穷小的应用</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="4">讲授法、讨论法、自主学习法、演示法。</td></tr>
</table>

教学过程设计

教学 内容	教师实 施活动	教学 意图
课前准备 1 无穷小量及其运算 无穷小量定义 **定理** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$的充分必要条件是：$f(x)=A+\alpha$，$\alpha$是 $x\to x_0$时的无穷小．即是说 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 表明 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 与 A 相差无穷小. 无穷小的运算性质 性质 1 有限个无穷小的代数和为无穷小； 性质 2 有界函数与无穷小的积为无穷小； 性质 3 有限个无穷小的积为无穷小. 注意：无穷小量与无穷大量的乘积不一定是无穷小量；而无穷多个无穷小量的代数和也未必是无穷小量. 利用无穷小的性质求极限 **例 1** 求$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$ **解**: 因为$\left\|\sin\dfrac{1}{x}\right\|\le 1$，所以$\sin\dfrac{1}{x}$是有界变量； 而当$x\to 0$时，$x$是无穷小量，所以$x\sin\dfrac{1}{x}$无	课前准备,学生的出勤情况、教室的卫生情况等 5 分钟 学生：观察图像 教师：用数学语言描述（难度） 20 分钟 教师：介绍特征，用数学语言来描述。 教师：强调定义的重要性 5 分钟 教师：例题演示。	养成良好的学习习惯和生活习惯  严于律己 来源于生活高于生活  认识数学 掌握学习方法 数学思维

穷小量，由无穷小量的性质 2 得 ，$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$ **2. 极限的四则运算法则** 设在 x 的同一变化过程中 $\lim f(x)=A,\quad \lim g(x)=B$ 这里的 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 省略了自变量 x 的变化趋势（下同），则有下面的法则. 法则 1　两个函数的代数和的极限，等于这两个函数的极限的代数和，即 $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm$. 法则 2　两个函数的积的极限等于这两个函数的极限的积，即 $\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\lim g(x)=AB$. 特别地，若 $g(x)=C$（常数），则 $\lim[f(x)g(x)]=\lim[Cf(x)]=\lim C\lim f(x)$. 即常数因子可以提到极限符号外面. 法则 3　两个函数商的极限，若分子、分母的极限都存在，则当分母的极限不为零时，商的极限等于这两个函数的极限的商，即 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0)$. 注　法则 1 和法则 2 可以推广到存在极限的有限个函数的情形. **例 2**　判断下列说法是否正确?为什么? （1）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在，	15 分钟 学生：小组讨论模仿练习，两个小组黑板书写。 教师：鼓励和评价学生，总结学生出现的问题。 5 分钟 复习强调 教师：讲解 学生：听讲，提问。做学习记录。 15 分钟 教师：阐述间断的实际含义。理论的抽象化。	 严格按照定义判断：法制观念  科学的思维方法：实事求是和独立思考 提升学生的数学核心素养： 数学抽象 直观想象

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]$一定存在． （2）若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 都不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]$一定不存在． **解**：（1）错．假设 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]$存在，由于 $g(x)=[f(x)+g(x)]-f(x)$，则由极限运算法则知，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 也存在，与条件矛盾．假设错误． （2）错．如设 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$， $g(x)=-\sin\frac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}(-\sin\frac{1}{x})$ 不存在，但 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+g(x)]=0$．		
3. 简单极限的计算 **例 3** 求 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-3x+1)$． **解**：$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-3x+1)=\lim\limits_{x\to 1}x^2-\lim\limits_{x\to 1}3x+\lim\limits_{x\to 1}1$ $=(\lim\limits_{x\to 1}x)^2-3\lim\limits_{x\to 1}x+1=1^2-3+1=-1$． 从例 3 可以看出，如果函数 $f(x)$ 为多项式，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$．即对于有理整函数（多项式），求其极限时，只要把自变量 x_0 的值代入函数就可以了．	5 分钟 教师：示范如何按照定义来判断间断点。	
例 4 求 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$． 分析 当 $x\to 2$ 时，分子、分母极限均为零，不能直接用商的极限法则，但 $x\to 2$ 时 $x-2\neq 0$，故可先分解因式，约去分子、分母中非零公因子，再用商的运算法则． **解**：	10 分钟 学生：小组讨论 四个小组回答问题 教师:质疑，学生解答。鼓励学生。	加强学生的表达能力和沟通能力、团结合作能力。

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x+2)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{4}$. **例 5** 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+3}{x^3+4x-1}$. 分析 由于当 $x\to\infty$ 时，分子和分母趋于无穷大，故不能直接用法则 3. 此时，我们用分子、分母中自变量的最高次幂 x^3 同除原式中的分子和分母，将无穷大转化为无穷小的相关问题处理. **解**: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+3}{x^3+4x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{3}{x^3}}{1+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{3}{1}=3$. 上述方法称为无穷小分出法. 一般地，对于一个分式函数，当 $x\to\infty$ 时，分子和分母都趋于无穷大，求此分式函数的极限时，先用分子、分母中自变量最高次幂去除分子、分母，以分出无穷小，然后再求其极限. 事实上，求有理函数在 $x\to\infty$ 时的极限，当 $a_0\neq 0, b_0\neq 0$ 时，有如下结果： $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0, & 若 m>n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & 若 m=n,\\ \infty, & 若 m<n.\end{cases}$ **例 6** 已知 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}+a & x<0\\ 1+x^2 & x>0\end{cases}$，当 a 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 的极限存在? **解**：因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x^2)=1$	结：学习数学方法、分析问题的能力，抓重点要素。 15 分钟 学生：两个小组阐述解决问题的方法和结果 教师：讲解和评价学生的结果 5 分钟 教师：示范	全面了解学生的知识基础和学生的思维习惯

<table>
<tr>
<td colspan="2">$\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x\sin\frac{1}{x}+a\right)=a$

如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 的极限存在，则

$\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)$

所以 $a=1$

注 对于求分段函数分段点处的极限，一般要先考察函数在此点的左右极限，只有左右极限存在且相等时极限才存在，否则，极限不存在.

例 7 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+1})$.

解: $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}+...+\frac{n}{n^2+1})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}(1+2+\cdots+n)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}=\frac{1}{2}$.</td>
<td>5 分钟

教师：示范

转换思维</td>
<td>让学生明白遇到困难怎么办。

能准确应对危机，具备健全人格。</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">课堂总结：

1、判断极限的存在。

2、能求常见函数的极限。</td>
<td>5 分钟。

教师：总结。</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>课后作业</td>
<td colspan="2">见习题</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>教学反思</td>
<td colspan="2"></td>
<td></td>
</tr>
</table>