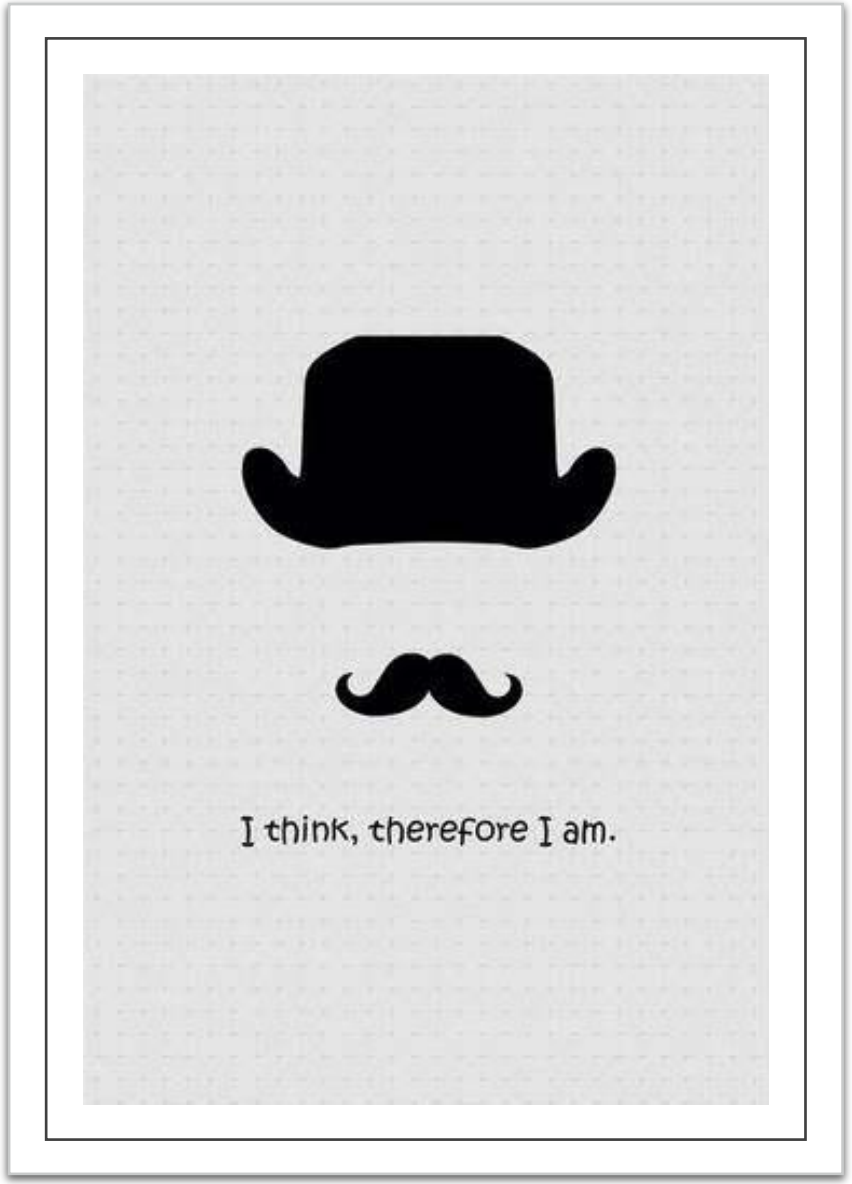
通往微积分——极限

- 数列的极限
- 函数的极限

极限的定义



数列的极限

高中接触过很多数列，如：

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots \longrightarrow 0$$

$$-1,\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{27},\ \frac{1}{64},\ -\frac{1}{125},\ \cdots \longrightarrow 0$$

$$2,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5},\ \cdots \frac{100}{99},\ \frac{101}{100},\ \cdots \longrightarrow 1$$

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots 10000,\ 10001,\ \cdots \longrightarrow +$$

你能发现这些数列的共同特点吗？

数列的极限

在数列中，a_n的值是随着n的变化而发生变化的，因此数列也是一种特殊的函数：自变量是n，因变量是a_n.

$$a_n = f(n)$$

刚才所列举的前三个数列，随着n的不断增大，a_n的值越来越接近一个常数 A ，称这个常数为该数列的极限。

记作：当$n \to +\infty$，

$$a_n \to A$$

或$\lim_{n\to\infty} a_n = A$

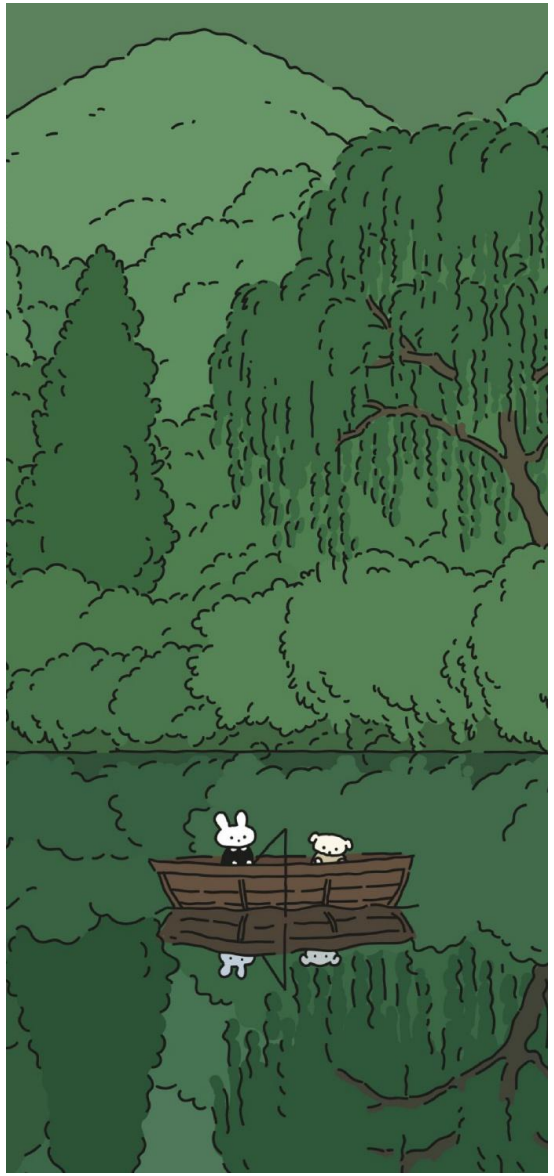
收敛数列

数列极限的定义

设有数列$\{x_n\}$和常数a，如果对于任给的正数ε，总存在正整数N，当$n > N$时，不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

恒成立，则称a时数列$\{x_n\}$的极限，或称数列$\{x_n\}$收敛于a，记作$\lim_{n\to\infty} x_n = a$.



根据刚才对极限的解释，
判断以下数列的收敛情况：

例1、数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$是否收敛?

例2、数列$(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

例3、数列$\{a\}$

课堂练习

1、求下列数列的极限并说明敛散性

①$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\frac{1}{n}\cdots$;

②$1,-1,\cdots,(-1)^{n-1},\cdots$;

③$2,4,6\cdots,2n,\cdots$;

④$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$;

进阶练习

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3n^2+1}{4n^3+2n+3}$

2、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2n}{n^2}$

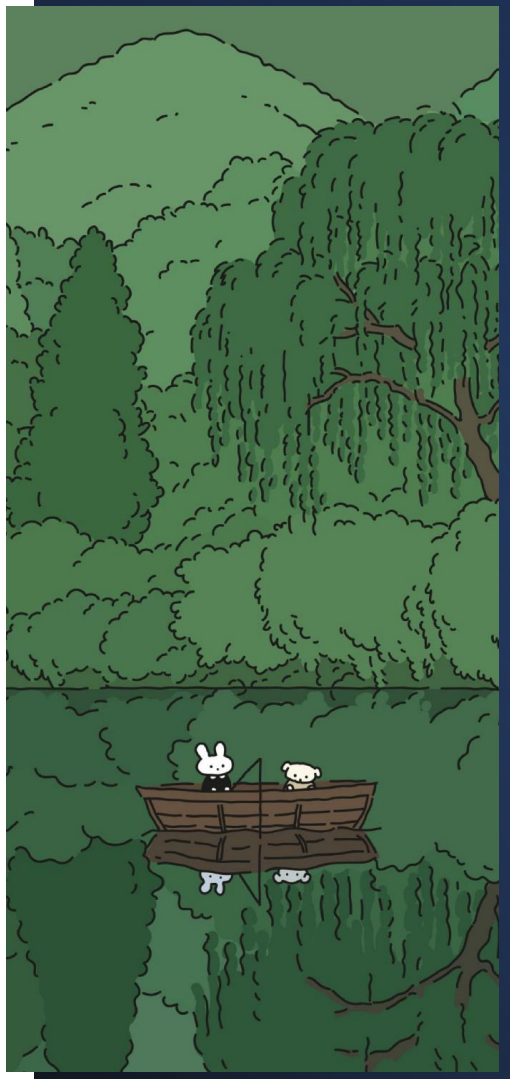
3、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$

4、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$

数列极限的性质

性质1.收敛数列的极限是唯一的.

性质2.收敛数列是有界的.

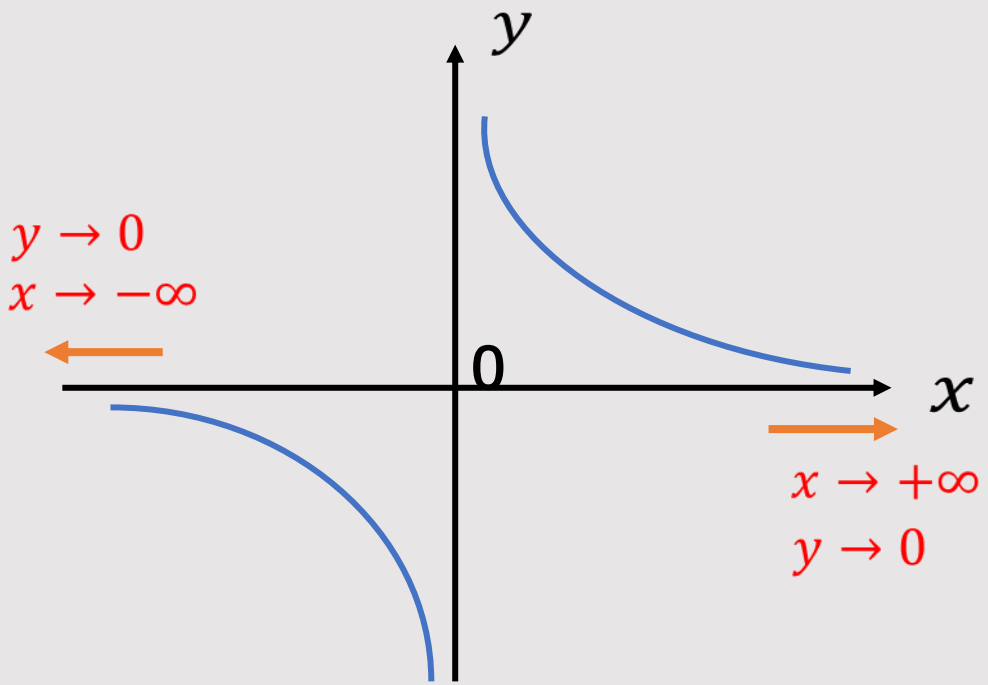


引例：函数$f(x) = \frac{1}{x}$

你能画出该函数的图像吗？

观察$x \to \infty$时，y是如何变化的？

$$x \to \infty \begin{cases} x \to +\infty \\ x \to -\infty \end{cases}, \quad y \to 0$$



函数极限的定义 $(x \to \infty)$

如果当$x \to \infty$时，函数$f(x)$无限接近于一个确定的常数A，那么称A为函数$f(x)$当$x \to \infty$的极限

记为：$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ 或$x \to \infty$，$f(x) \to A$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A (x \to +\infty, f(x) \to A)$$

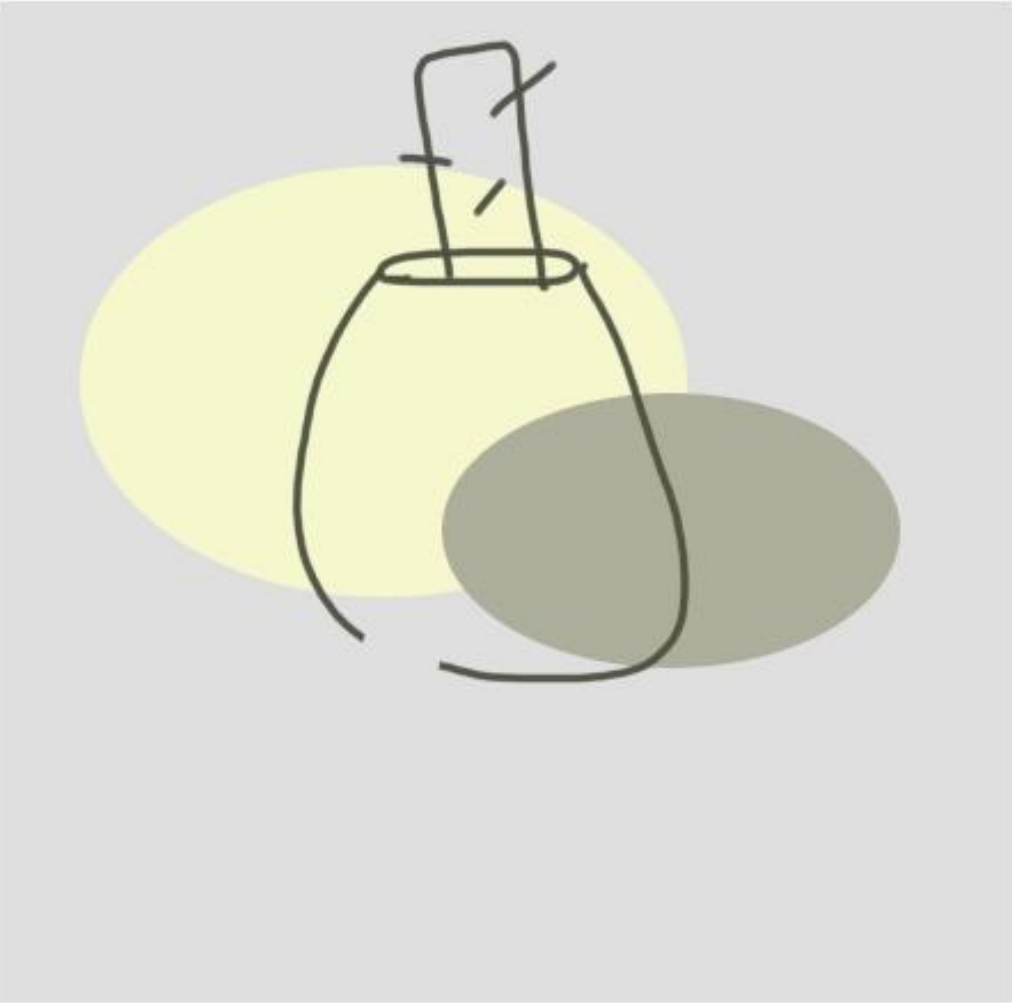
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A (x \to -\infty, f(x) \to A)$$

结论：$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$且$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$

例1、当$x \to \infty$时，
$f(x) = 2^x$有无极限？

例2、当$x \to \infty$时，
$f(x) = 3 + \frac{2}{x}$有无极限？

例3、当$x \to \infty$时，
$f(x) = (\frac{1}{2})^x$有无极限？



函数的极限

②$x \to x_0$

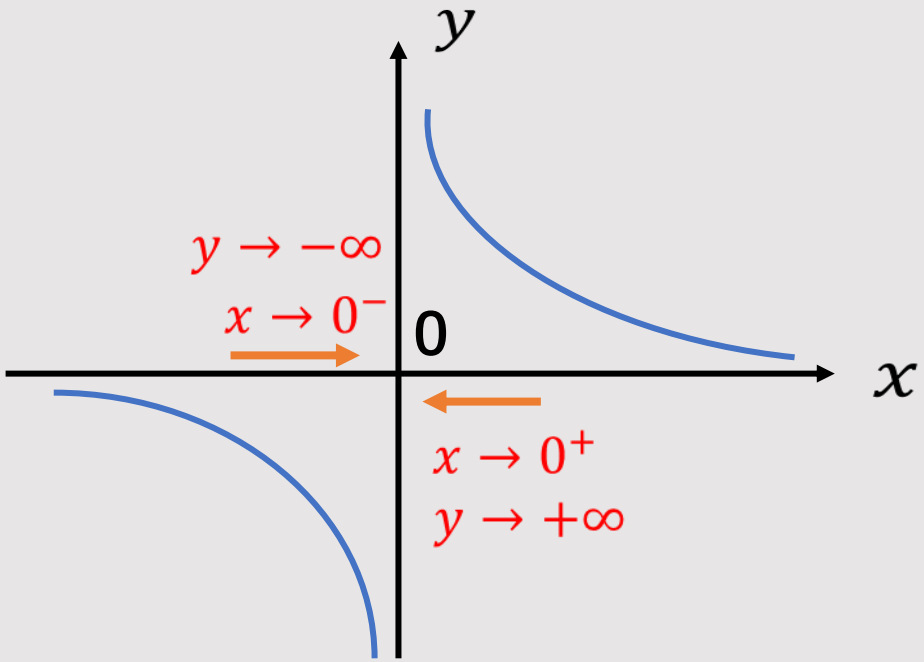
I think, therefore I am.

引例：函数$f(x) = \frac{1}{x}$

你能画出该函数的图像吗？

观察$x \to 0$时，y是如何变化的？

$$x \to 0 \begin{cases} x \to 0^+ & y \to +\infty \\ x \to 0^- & y \to -\infty \end{cases}$$



函数极限的定义 $(x \to x_0)$

设函数$y = f(x)$在点x_0的左右近旁有定义（在x_0处可以没有）

如果当$x \to x_0$时，函数$f(x)$无限接近于一个确定的常数A，那么称A为函数$f(x)$当$x \to x_0$的极限

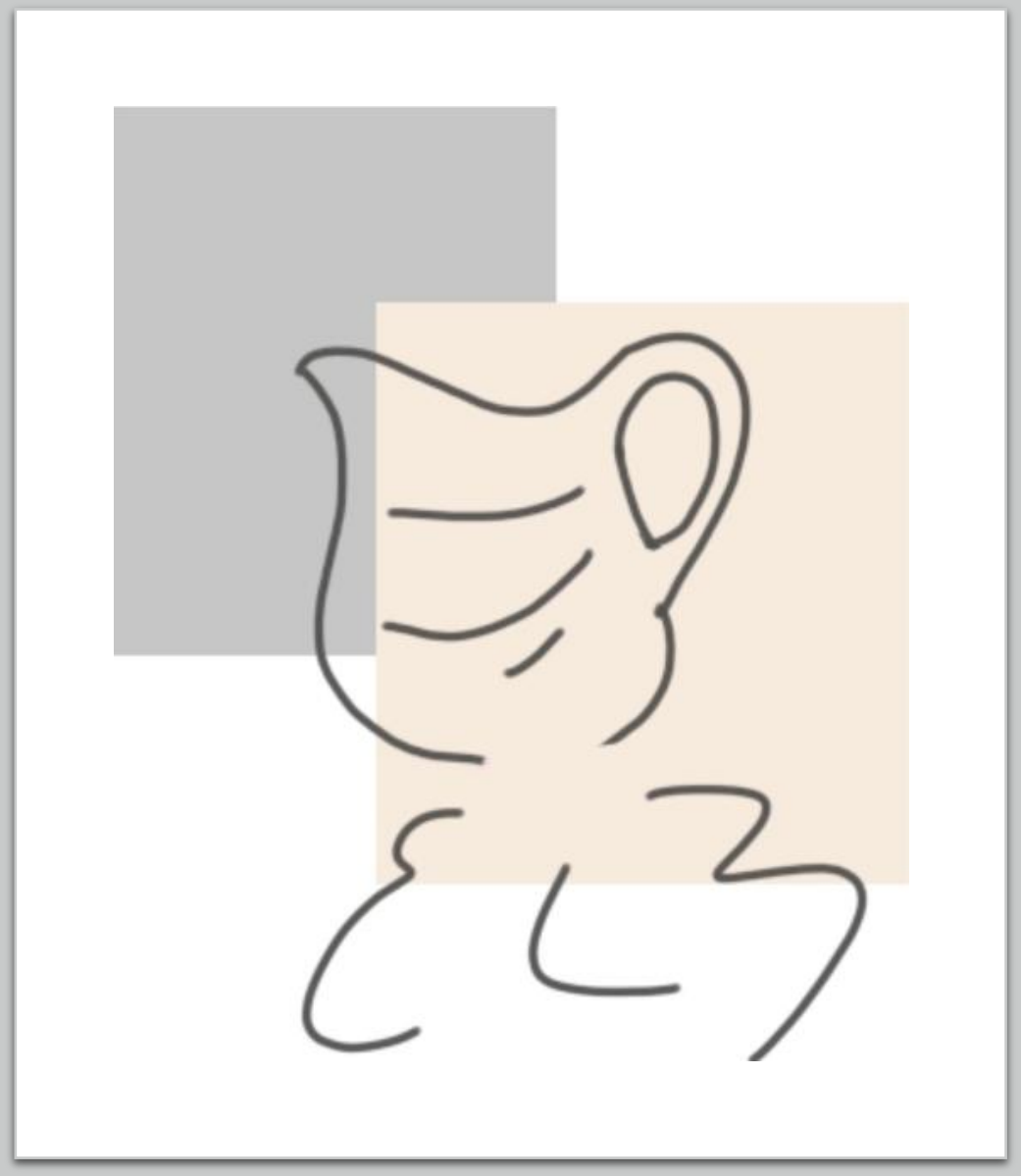
记为：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 或$x \to x_0$，$f(x) \to A$

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$ 或$f(x_0 - 0) = A$ 左极限

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ 或$f(x_0 + 0) = A$ 右极限

注意：$x \to x_0$表示x无限接近x_0但取不到x_0

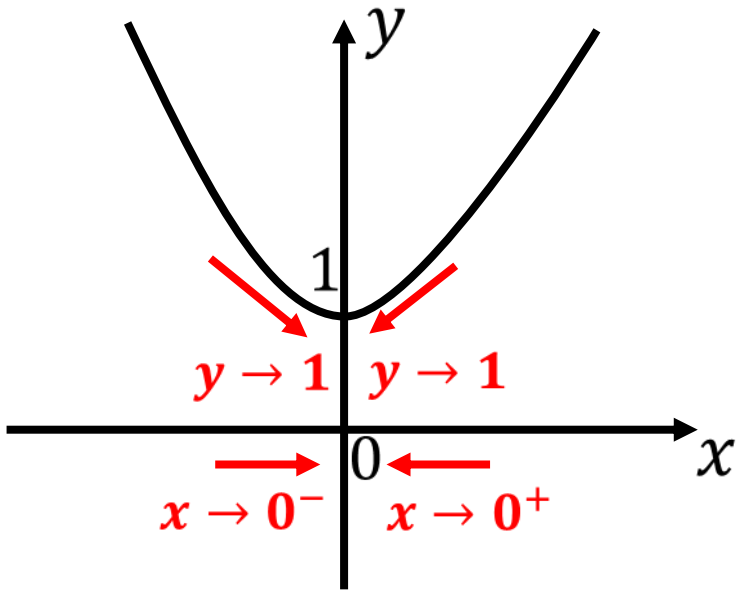
结论：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$且$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$



例1、求函数$f(x)=(1+x^2)$当$x\to 0$时的极限.

分析：$x\to 0^-$，$f(x)\to 1$

$x\to 0^+$，$f(x)\to 1$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)=1$$